最小normal論理Kより小さい擬論理の標準形展開 (計算モデルとアルゴリズム)

大芝, 猛

数理解析研究所講究録
1093巻 1999年 168-172

最小normal論理Kより小さい擬論理の標準形展開

相山女学園大学　大芝　猛（Takeshi　Oshiba）

知識論理またはmulti-modal logic は命題論理の標準形展開の拡張により特性化される。n 個の modal operator $K_1,\cdots,K_n$ に関する様々な公理をもついくつかの n-modal logic L について、高々m変数$p_1,\cdots,p_m$を含む論理式Aの標準形展開は、

「命題論理の最小項の集合 ${}^{(m)}W^{(0)} = \{ p_1^{\delta 1} \wedge \cdots \wedge p_m^{\delta m} \mid \delta 1,\cdots,\delta m \in \{0,1\}\}$

$$\text{但し}\quad p^\delta \begin{cases} =p & (\delta=1) \\ =\neg p & (\delta=0) \end{cases}$$

とこれを元にした基礎集合（拡張された最小項の集合）の列

$${}^{(m)}W^{(k+1)} = \{ \langle g, \begin{pmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ k_n[U_n] \end{pmatrix} \rangle \mid g \in {}^{(m)}W^{(k)}, U1,\cdots,Un \subseteq {}^{(m)}W^{(k)} \}$$

$(k=0,1,2,\cdots)$」を

「論理Lの公理系と推論に対応して制限した集合列」：${}^{(m)}W_L{}^{(k)} = \{f \in {}^{(m)}W^{(k)} \mid \text{not}\, L \vdash \neg^* f\}$ $(k=0,1,2,\cdots)$（Lの基底集合列という）の上で行える。[3],[4]

以下は multi-modal でも可能であるが、uni-modalの場合に限って述べる。

○標準形展開の目的 は　論理式$A \in {}^{(m)}\ell^{(k)}$に対し（${}^{(m)}\ell^{(k)}$は高々m変数p1,…,pmを含み、modal operatorsの深さ(degree) kの論理式の集合)、Aの証明可能性(Lでの)をAの標準形展開の要素である最小項の集合${}^{(m)}W_{A\cdot L}$ が${}^{(m)}W_L{}^{(k)}$と一致するか？　で判定することにある：

$$(\#)\quad L \vdash A \;\Leftrightarrow\; {}^{(m)}W_{A\cdot L} = {}^{(m)}W_L{}^{(k)}$$

但し、${}^{(m)}W_{A\cdot L} = {}^{(m)}W_A \cap {}^{(m)}W_L{}^{(k)}$　であり、${}^{(m)}W_A$ $(\subseteq {}^{(m)}W^{(k)})$の定義は後述の(def)内に記述される。

特にLが命題論理L0の場合には (*)は${}^{(m)}W_{L0}{}^{(0)} = {}^{(m)}W^{(0)}$, ${}^{(m)}W_{A\cdot L0} = {}^{(m)}W_A$ であるため、よく知られたつぎの形となる。

$$L0 \vdash A \;\Leftrightarrow\; {}^{(m)}W_A = {}^{(m)}W^{(0)}$$

ここで、つぎの Proposition が成立する。

[Proposition] 前記(#)が成立するための必要充分条件はつぎの(N1)&(N2)である。

(1) Aのでのsetwise-expansion ${}^{(m)}W_A$ ($\subseteq {}^{(m)}W^{(k)}$)につき、そのlogical meaning ${}^{*(m)}W_A$(最小項の論理和) がAとLで同値となること：

(N1)：$L \vdash A \equiv {}^{*(m)}W_A$

(2) 各基底集合 ${}^{(m)}W^{(k)}$のlogical meaning(${}^{(m)}W^{(k)}$内の最小項の論理和)がLで証明可能なこと：

(N2)：$L \vdash {}^{*(m)}W^{(k)}$

(def) このような標準形展開に用いられる、基礎集合 ${}^{(m)}W^{(k)}$、その部分集合、それらの要素(最小項)などの "logical meaning *" は次のように定義する：

(1) $U=\{f1,\cdots,fr\}$ ($\subseteq {}^{(m)}W^{(k)}$) につき、 $^*U \equiv {}^*f1 \vee \cdots \vee {}^*fr$

(2) $({}^*f=)\ {}^*\langle g\ ,\ K[U]\rangle \equiv {}^*g \wedge {}^*K[U]$

(3) $${}^*K[U] \equiv K({}^*U) \wedge \bigwedge_{U \not\subseteq X \subseteq {}^{(m)}W^{(k)}} \neg K({}^*X)$$

(def) ${}^{(m)}W_A$ の定義：論理式Aのset-wise expansion (論理Lに独立な)

1) ${}^{(m)}Wp_j=\{p_1{}^{\delta 1} \wedge \cdots \wedge p_{j-1}{}^{\delta j-1} \wedge p_{j+1}{}^{\delta j+1} \wedge \cdots \wedge p_m{}^{\delta m} \mid \delta_1, \cdots, \delta_{j-1}, \delta_{j+1}, \cdots$
$\cdots, \delta m \in \{0,1\}\}$

2) ${}^{(m)}W_{B\wedge C}= {}^{(m)}W_B{}^{<k>} \cap {}^{(m)}W_C{}^{<k>}$, k=max(deg(B),deg(C))

3) ${}^{(m)}W_{B\vee C}= {}^{(m)}W_B{}^{<k>} \cup {}^{(m)}W_C{}^{<k>}$, k=max(deg(B),deg(C))

4) ${}^{(m)}W_{\neg B}= {}^{(m)}W^{<k>} - {}^{(m)}W_B$, k=deg(B)

5) ${}^{(m)}W_{B\supset C}=({}^{(m)}W^{<k>} - {}^{(m)}W_B{}^{<k>}) \cup {}^{(m)}W_C{}^{<k>}$, k=max(deg(B),deg(C))

6) ${}^{(m)}W_{K(B)}=\{\langle g\ ,\ K[X]\rangle \mid g \in {}^{(m)}W^{(k)}, X \subseteq {}^{(m)}W_B\}$, k=deg(B)

但し、 $U \subseteq {}^{(m)}W^{<1>}$, $k \geq 1$ 対し、$U^{<k>}=U^{\overbrace{\prime\cdots\prime}^{k-1}}$ とし、

$U' =\{\langle g\ ,\ K[X]\rangle \mid g \in U,\ X \subseteq {}^{(m)}W^{(1)}\}$ とする。

[註]これらの定義から直接：Proposition ${}^{(m)}W_{*U}=U$ ($U \subseteq {}^{(m)}W^{(k)}$) (※) が証明される。

○ある論理Lにたいし、(#)をみたす${}^{(m)}W_L{}^{(k)}$ ($k=0,1,2,\cdots$; $m=0,1,2,\cdots$) は「Lを標準形展開的にcharacterizeする」という。(set-wize expression like に)

○Lが K(ｸﾘﾌﾟｷの最小normal論理) ,S4,S5 等について、それらをcharacterizeする ${}^{(m)}W_K{}^{(k)}$, ${}^{(m)}W_{S4}{}^{(k)}$, ${}^{(m)}W_{S5}{}^{(k)}$ 等は ${}^{(m)}W^{(k)}$にそれぞれの論理の公理からくる制限条

件を与えた集合として、得られる。例えば、

最小normal論理K ［公理：$K(\phi \supset \psi) \supset (K(\phi) \supset K(\psi))$ とトートロジー；推論：m.p., $\dfrac{\psi}{K(\psi)}$ ］

に対しては、

$$\underline{{}^{(m)}\mathbb{W}_K{}^{(0)}} = \underline{{}^{(m)}\mathbb{W}^{(0)}}, \quad \underline{{}^{(m)}\mathbb{W}_K{}^{(1)}} = \underline{{}^{(m)}\mathbb{W}^{(1)}},$$

$$\underline{{}^{(m)}\mathbb{W}_K{}^{(k+2)}} = \{\langle g,\ K[U], K[V]\rangle \mid \underline{g \in {}^{(m)}\mathbb{W}^{(k)}}, U \subseteq {}^{(m)}\mathbb{W}_K{}^{(k)}, V \subseteq {}^{(m)}\mathbb{W}^{(k+1)}, \underline{{}'V = U}\}$$

で与えられる。但し $'V = \{ f \mid \langle f, K[X]\rangle \in V \text{ for some } X \subseteq {}^{(m)}\mathbb{W}_K{}^{(k)}\}$ 。

ここで、$\underline{g \in {}^{(m)}\mathbb{W}^{(k)}}$ & $\underline{{}'V = U}$

$\Leftrightarrow \forall \phi \forall \psi\ (\max(\deg(\phi), \deg(\psi)) = k \Rightarrow \langle g,\ K[U], K[V]\rangle \in {}^{(m)}\mathbb{W}_{\underline{K(\phi \supset \psi) \supset (K(\phi) \supset K(\psi))}})$

のように $\underline{{}'V=U}$ は公理 $\underline{K(\phi \supset \psi) \supset (K(\phi) \supset K(\psi))}$ からくる制約条件である。

一般に（＃）を成立させるためのN1,N2 が証明されるためには、論理Lの中の 公理 $\underline{K(\phi \supset \psi) \supset (K(\phi) \supset K(\psi))}$が用いられている。 最小normal論理Kも（S4,S5 も）この公理を含んでいる。

しかし、このことによって、Kの標準形展開の基底集合は $\underline{{}^{(m)}\mathbb{W}_K{}^{(k)} \subsetneqq {}^{(m)}\mathbb{W}^{(k)}}$ のように 基礎集合 ${}^{(m)}\mathbb{W}^{(k)}$ の真部分集合であって、 基礎集合 ${}^{(m)}\mathbb{W}^{(k)}$ の項全体は展開のために用いられていない。そこで、つぎのように

PROBLEM ：基礎集合 ${}^{(m)}\mathbb{W}^{(k)}$ のすべての項が標準形展開のために必要となる論理L ： $\underline{{}^{(m)}\mathbb{W}_L{}^{(k)} = {}^{(m)}\mathbb{W}^{(k)}}$ となる論理Lの存在が問題となる。（Kより弱い論理）

○通常の意味での論理は公理と推論で規定される。従ってもしPROBLEMのような論理Lで推論がKの推論(m.p., $\dfrac{\psi}{K(\psi)}$)と同じ論理があれば、かかる論理Lを規定する公理は、Kの公理 A1: $K(\phi \supset \psi) \supset (K(\phi) \supset K(\psi))$ より弱い公理であるといえる。しかし、N1,N2が示される程度には強い公理である。

（このような公理は通常の代入法則を許す意味では、現在不明と考えられる？）

○ この問題に対する解答の１つは

「次の（†)のように“代入則を制限して用いる $A1^r$ ”を用いた論理」(擬論理？)Ｐによって与えることができる。「[2]によれば、かかるＰも'論理'である。」

Ｐの公理：トートロジーおよび

$\underline{A1^r}$ ： $\{\underline{K(\phi \supset \psi) \supset (K(\phi) \supset K(\psi)) \mid \phi, \psi \text{ は同じdegreeを持つ論理式}}\}$ …(†)

Pの推論： m.p. ， $\dfrac{\psi}{K(\psi)}$

このPを用いるならば、$P\vdash {}^{(m)}\mathbb{W}_P{}^{(k)} = {}^{(m)}\mathbb{W}^{(k)}$ を示すことができ、

(N1)：$P\vdash A\equiv {}^{*(m)}\mathbb{W}_A$

(N2)：$P\vdash {}^{*(m)}\mathbb{W}^{(k)}$

(N3)：$P\vdash A \Leftrightarrow {}^{(m)}\mathbb{W}_A = {}^{(m)}\mathbb{W}^{(k)}$

を証明することができる。

従って、擬論理Pは“命題論理の標準形展開の完全な意味での拡張”の成立する論理といえる。

参考文献

[1] M.Sato:A Study of Kripke-type Models for some Modal Logics by Gentzen's Sequential Method,Publications Research Institute for Mathematical Science, Kyouto University ,1977

[2] R.Goldbratt:Logics of Time and Computation,Center for Study of Languages and Information,1992

[3] 大芝猛,小橋一秀：知識命題の標準形を用いる妥当性,数理解析研究所講究録906,1995

5[4] 大芝猛,小橋一秀：知識論理・様相論理の標準形展開基底による特性化,数理解析研究所講究録950,1996

Appendix: [Proposition]((N1)＆(N2))⇔(#)の証明

((N1)＆(N2))⇒(#) part:

「(N1):任意の$A\in {}^{(m)}\ell^{(k)}$に対し $L\vdash A\equiv {}^{*(m)}\mathbb{W}_A$

(N2)：$L\vdash {}^{*(m)}\mathbb{W}^{(k)}$ 」が成立するならば、

(#) 任意の$A\in {}^{(m)}\ell^{(k)}$に対し $L\vdash A \Leftrightarrow {}^{(m)}\mathbb{W}_{A\cdot L} = {}^{(m)}\mathbb{W}_L{}^{(k)}$

(Proof) if part:仮定${}^{(m)}\mathbb{W}_{A\cdot L} = {}^{(m)}\mathbb{W}_L{}^{(k)}$ から${}^{(m)}\mathbb{W}_L{}^{(k)}\subseteq {}^{(m)}\mathbb{W}_A$.従って、

$L\vdash {}^{*(m)}\mathbb{W}_L{}^{(k)} \Rightarrow L\vdash {}^{*(m)}\mathbb{W}_A$. (1)

一方、(N2)：$L\vdash {}^{*(m)}\mathbb{W}^{(k)}$ と 定義 ${}^{(m)}\mathbb{W}_L{}^{(k)}=\{f\in {}^{(m)}\mathbb{W}^{(k)}\mid \mathrm{not}\,L\vdash\neg{}^{*}f\}$

から、$L\vdash {}^{*(m)}\mathbb{W}_L{}^{(k)}$ (2)が成立 . 従って (N1),(1),(2) から $L\vdash A$.

only if part: $L\vdash A$ ＆ ${}^{(m)}\mathbb{W}_{A\cdot L}\neq {}^{(m)}\mathbb{W}_L{}^{(k)}$ とせよ。 従って、${}^{(m)}\mathbb{W}_L{}^{(k)}\subseteq {}^{(m)}\mathbb{W}_A$ ではない故、 $\exists f_0\in {}^{(m)}\mathbb{W}_L{}^{(k)}$ s.t. $f_0\notin {}^{(m)}\mathbb{W}_A$. ${}^{(m)}\mathbb{W}_A\subseteq {}^{(m)}\mathbb{W}^{(k)}-\{f_0\}$. 故に$L\vdash A$ と (N1) から、$L\vdash {}^{*}({}^{(m)}\mathbb{W}^{(k)}-\{f_0\})$. ${}^{(m)}\mathbb{W}_{*f_0}=\{f_0\}$((def)の[註](※)) と

${}^{(m)}\mathbb{W}_{\neg * f_0}$の定義から $\underline{L \vdash {}^{*(m)}\mathbb{W}_{\neg * f_0}}$．再び(N1) から $\underline{L \vdash \neg{}^{*}f_0}$．故に$f_0 \notin {}^{(m)}\mathbb{W}_{L}{}^{(k)}$．これは矛盾。

<u>(#)⇒ (N1)& (N2)</u> part:

(N1)：<u>(#)</u> のAとして $A \supset {}^{*(m)}\mathbb{W}_A$ と ${}^{*(m)}\mathbb{W}_A \supset A$ をとる。

$$
\begin{aligned}
{}^{(m)}\mathbb{W}_{(A\supset {}^{*(m)}\mathbb{W}_A)} &= ({}^{(m)}\mathbb{W}^{(k)} - {}^{(m)}\mathbb{W}_A) \cup {}^{(m)}\mathbb{W}_{{}^{*(m)}\mathbb{W}_A} \\
&= ({}^{(m)}\mathbb{W}^{(k)} - {}^{(m)}\mathbb{W}_A) \cup {}^{(m)}\mathbb{W}_A \quad \text{(def)[註]の(※)} \\
&= {}^{(m)}\mathbb{W}^{(k)}
\end{aligned}
$$

$${}^{(m)}\mathbb{W}_{(A\supset {}^{*(m)}\mathbb{W}_A)} \cap {}^{(m)}\mathbb{W}_{L}{}^{(k)} = {}^{(m)}\mathbb{W}^{(k)} \cap {}^{(m)}\mathbb{W}_{L}{}^{(k)}$$

$${}^{(m)}\mathbb{W}_{(A\supset {}^{*(m)}\mathbb{W}_A)} \cdot L = {}^{(m)}\mathbb{W}_{L}{}^{(k)}$$

故に、[#] より、 $L \vdash A \supset {}^{*(m)}\mathbb{W}_A$ ． 同様に、$L \vdash {}^{*(m)}\mathbb{W}_A \supset A$ ．

(N2)：[#] のAとして ${}^{*(m)}\mathbb{W}^{(k)}$ をとる。

$$
\begin{aligned}
{}^{(m)}\mathbb{W}_{({}^{*(m)}\mathbb{W}^{(k)})} \cdot L &= {}^{(m)}\mathbb{W}_{({}^{*(m)}\mathbb{W}^{(k)})} \cap {}^{(m)}\mathbb{W}_{L}{}^{(k)} \\
&= {}^{(m)}\mathbb{W}^{(k)} \cap {}^{(m)}\mathbb{W}_{L}{}^{(k)} \quad \text{(def)[註]の(※)} \\
&= {}^{(m)}\mathbb{W}_{L}{}^{(k)}
\end{aligned}
$$

従って、[#] より、 $L \vdash {}^{*(m)}\mathbb{W}^{(k)}$も成立。